Вступительная работа в СПб губернаторский ФМЛ № 30, 21.08.2020, 10 класс, 1 вариант

1. *Упростите* $\left(\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}-(a+b)\right)\cdot\dfrac{b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{2}}}$

Решение. Преобразуем по формулам сокращённого умножения (сумма кубов и разность квадратов):

$$\left(\frac{(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b)}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}-(a+b)\right)\cdot\frac{b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}(b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}})(b^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}})}=$$

$$=-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}(b^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}})}=-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{a-b}.$$

В качестве ответа можно было указать одну из двух дробей $-\dfrac{1}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}$ или $\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{a-b}$.

2. *Найти сумму всех трёхзначных чисел, которые при делении на 11 дают остаток 5.*

Решение. Числа $104, 115, \ldots, 995$ образуют арифметическую прогрессию из 82 членов.
(т.к. $104 = 5 + 9\cdot 11$, а $995 = 5 + 90\cdot 11$).

Сумма первых 82 членов прогрессии равна $\dfrac{104+995}{2}\cdot 82 = 1099\cdot 41 = 45\,059$.

3. *Банк в конце года начисляет 20% к сумме, находящейся на счёте в начале года.*
Каким станет вклад $50\,000$ *рублей через 3 года.*

Решение. (1 способ)

Через год начислят проценты $50\,000\cdot 0.2 = 10\,000$ рублей. Вклад станет $60\,000$ рублей.
Через два года начислят проценты $60\,000\cdot 0.2 = 12\,000$ рублей. Вклад станет $72\,000$ рублей.
Через три года начислят проценты $72\,000\cdot 0.2 = 14\,400$ рублей. Вклад станет $86\,400$ рублей.

Решение. (2 способ)

Каждый год вклад увеличивается в $1+\dfrac{20}{100}=1{,}2$ раза.

Через три года он станет $50\,000\cdot\left(\dfrac{12}{10}\right)^3 = 50\cdot 12^3 = 86\,400$ рублей.

4. *При делении двузначного числа на сумму его цифр получили частное 7 и остаток 3, при делении этого же числа на число, записанное теми же цифрами в обратном порядке, получили частное 1 и остаток 36.*
Найдите это число.

Решение.

Обозначим цифры числа a и b. Тогда исходное число $10a+b$, сумма цифр $a+b$, перевёрнутое число $10b+a$, и

$$\begin{cases}10a+b=7\cdot(a+b)+3\\10a+b=1\cdot(10b+a)+36\end{cases}\iff\begin{cases}3a-6b=3\\9a-9b=36\end{cases}\iff\begin{cases}a-2b=1\\a=b+4\end{cases}\iff\begin{cases}a=7\\b=3.\end{cases}$$

Ответ: 73.

5. *Решить уравнение* $(x^2+x-2)\sqrt{x+1}=(x-1)(x^2+3x+2)$.

Решение. Уравнение имеет смысл только при $x\geqslant -1$. Преобразуем:

$$(x+2)(x-1)\sqrt{x+1}=(x-1)(x+1)(x+2)$$
$$(x+2)(x-1)(\sqrt{x+1}-(x+1))=0.$$

Очевидно, что 1 является корнем, а число $-2<-1$, поэтому не подходит. Решим уравнение $\sqrt{x+1}=x+1$.

$$\sqrt{x+1}=x+1\iff\begin{cases}x+1\geqslant 0\\x+1=(x+1)^2\end{cases}\iff x=-1 \text{ или } x=0.$$

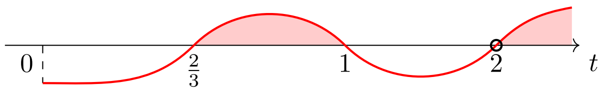
Ответ: $\{-1,0,1\}$.

Вступительная работа в СПб губернаторский ФМЛ № 30, 21.08.2020, 10 класс, 1 вариант

6. *Решить неравенство* $\dfrac{x\sqrt{x}+x-5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} \geqslant x.$

Решение. Пусть $t=\sqrt{x}$, тогда неравенство имеет вид:

$$\frac{t^3+t^2-5t+2}{t-2} \geqslant t^2 \iff \frac{t^3+t^2-5t+2-t^2(t-2)}{t-2} \geqslant 0 \iff \frac{3t^2-5t+2}{t-2} \geqslant 0 \iff \frac{(t-1)(3t-2)}{t-2} \geqslant 0$$



$$\left[\begin{aligned} &\tfrac{2}{3} \leqslant t \leqslant 1 \\ &2 < t \end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned} &\tfrac{2}{3} \leqslant \sqrt{x} \leqslant 1 \\ &2 < \sqrt{x} \end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned} &\tfrac{4}{9} \leqslant x \leqslant 1 \\ &4 < x \end{aligned}\right.$$

Ответ: $\left[\frac{4}{9};1\right] \cup (4,+\infty)$.

7. *Решить уравнение* $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+3x=4-\dfrac{3}{x}.$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\frac{1}{x}\right)=4 \iff t^2+3t-4=0 \iff \left[\begin{aligned} &x+\frac{1}{x}=-4 \\ &x+\frac{1}{x}=1 \end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned} &x^2+4x+1=0 \\ &x^2-x+1=0 \end{aligned}\right. \iff x=-2\pm\sqrt{3}.$$

Ответ: $\{-2-\sqrt{3};-2+\sqrt{3}\}$.

8. *Два велосипедиста выехали одновременно из пункта A в B, первый со скоростью 24 км/ч, второй — 18 км/ч. Спустя час вслед за ними выехал автомобиль, который обогнал второго велосипедиста на 10 минут раньше, чем первого. Найдите скорость автомобиля.*

Решение.

Пусть v — скорость автомобиля (км/ч);
t и $t+\frac{1}{6}$ — время до встречи автомобиля со 2 и 1 велосипедистом соответственно (ч);
$18t=v(t-1)$ — расстояние, пройденное 2 велосипедистом (и автомобилем) до встречи;
$24(t+1/6)=v(t-1+\frac{1}{6})$ — расстояние, пройденное 1 велосипедистом (и автомобилем) до встречи;
$24(t+1/6)-18t=v\cdot\frac{1}{6}$ — расстояние, пройденное автомобилем между встречами.

$$\begin{cases} 24(t+1/6)-18t=v\cdot\frac{1}{6} \\ 18t=v(t-1) \end{cases} \iff \begin{cases} v=6(6t+4) \\ 18t=6(6t+4)(t-1) \end{cases} \iff \begin{cases} v=6(6t+4) \\ 6t^2-5t-4=0 \end{cases} \overset{t>0}{\iff} \begin{cases} v=72 \\ t=\frac{4}{3} \end{cases}$$

Ответ: 72 км/ч.

9. *При каком значении a сумма корней уравнения $2x^2-|a^2-3|x=1$ больше, чем a?*

Решение. Корни существуют тогда и только тогда, когда $|a^2-3|^2+8 \geqslant 0$ — истинно при всех a.

По теореме Виета сумма корней равна $\dfrac{1}{2}|a^2-3|$. Решим неравенство

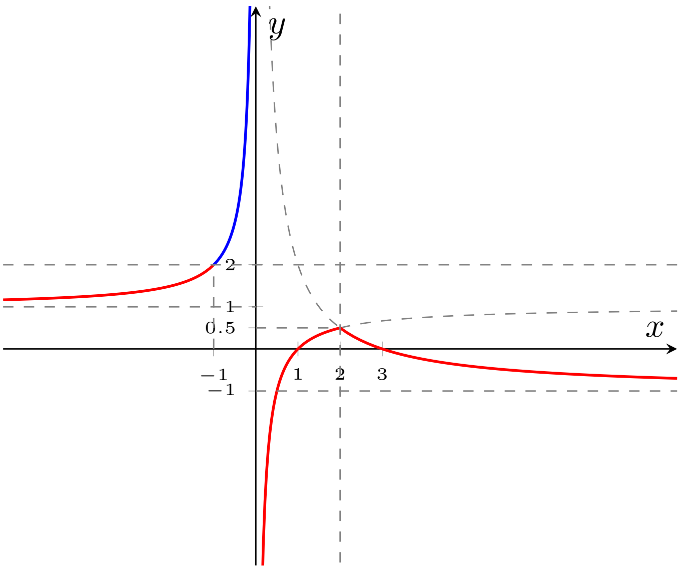
$$\frac{1}{2}|a^2-3|>a \iff \left[\begin{aligned} &a^2-3>2a \\ &a^2-3<-2a \end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned} &(a-3)(a+1)>0 \\ &(a+3)(a-1)<0 \end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned} &a>3 \\ &a<-1 \\ &-3<a<1 \end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned} &a>3 \\ &a<1 \end{aligned}\right.$$

Ответ: при $a \in (-\infty;1)\cup(3;+\infty)$ сумма корней больше, чем a.

10. *Построить график функции* $f(x) = \dfrac{1-|x-2|}{x}$ *и решить неравенство* $f(x) \leqslant 2$.

Решение.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x}{x}, & x \geqslant 2 \\ \dfrac{x-1}{x}, & x < 2 \end{cases} \iff f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x} - 1, & x \geqslant 2 \\ 1 - \dfrac{1}{x}, & x < 2,\ x \neq 0. \end{cases}$$



Ординаты точек, лежащих на красной части графика, не превосходят 2. Абсциссы этих точек являются решениями неравенства $f(x) \leqslant 2$.

Ответ: $(-\infty; -1] \cup (0; +\infty)$.

11. *Построить график функции* $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$ *и найти, при каком* k *этот график имеет три общие точки с графиком функции* $g(x) = k(x-7)+4$.

Решение.

План построения: строим параболу $y = x^2 - 6x + 5 = (x-3)^2 - 4$.
Вершина параболы находится в точке $(3, -4)$, ветви вверх, корни 1 и 5.

Затем отражаем часть в нижней полуплоскости относительно оси абсцисс.

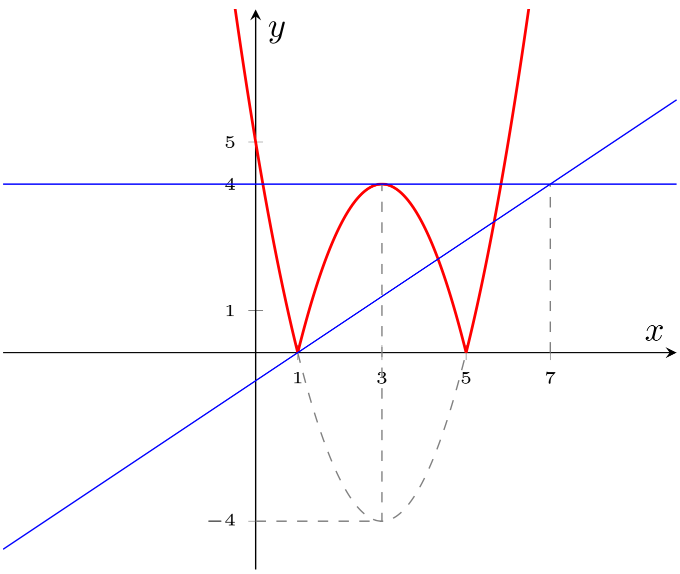


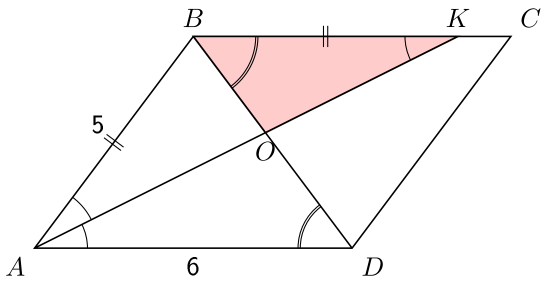
График $g(x)$ — невертикальная прямая, с угловым коэффициентом k, проходящая через $(7, 4)$.

Из всех таких прямых подходят горизонтальная прямая при $k = 0$ и наклонная прямая, проходящая через $(1, 0)$, при $k = \frac{2}{3}$.

Ответ: $k = 0$ или $k = \frac{2}{3}$.

12. *$ABCD$ — параллелограмм площадью 22. AK — биссектриса острого угла A, точка $K \in BC, AB = 5, AD = 6, AK \cap BD = O$. Найти площадь $\triangle BOK$.*

Решение.



Решение.

AO — биссектриса $\triangle BAD \implies \lambda = \frac{BO}{OD} = \frac{AB}{AD} = \frac{5}{6}$.

$\triangle BOK \sim \triangle DOA$ (по 2-м углам) $\implies \frac{S_{BOK}}{S_{DOA}} = \left(\frac{BO}{OD}\right)^2 = \frac{25}{36}$.

$\frac{S_{DOA}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{DOA}}{2 \cdot S_{ABD}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{OD}{BD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + BO : OD} = \frac{3}{11}$.

Т.о. $S_{BOK} = \frac{25}{36} \cdot \frac{3}{11} \cdot 22 = \frac{25}{6}$.

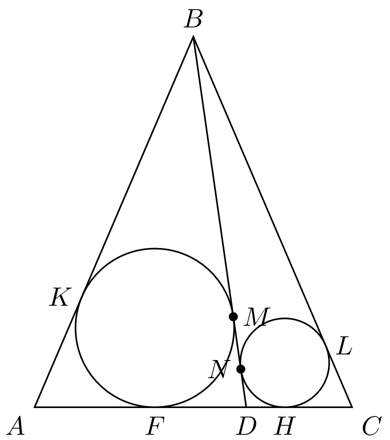
Ответ: $\frac{25}{6}$.

Решение. (2 способ)

$\angle DAK = \angle KAB = \angle AKB$ ($ABCD$ — пар-м, AK — бис-са) $\implies$ ABK — р/б $\implies$ $AB = BK = 5 \implies \triangle BOK \sim \triangle DOA$ с коэффициентом подобия $5 : 6$.

Значит, высота $\triangle BOK$ составляет $\frac{5}{5+6}$ высоты $ABCD$. Высота $ABCD$ равна $S(ABCD) : AD = \frac{22}{6} = \frac{11}{3}$.
$S(BOK) = \frac{1}{2} \cdot BK \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{11}{3} = \frac{25}{6}$.

13. *AC — основание р/б $\triangle ABC, D \in AC, AD = 4, CD = 2$. Окружности, вписанные в $\triangle ABD$ и $\triangle DBC$, касаются BD в точках M и N соответственно. Найти длину отрезка MN.*



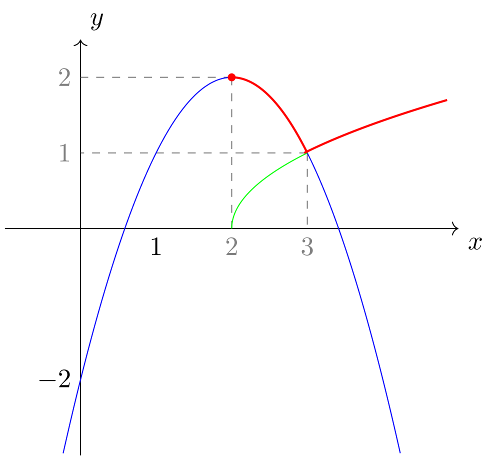
Решение. Так как $AD > DC$, то точки на отрезке BD расположены в порядке $B - M - N - D$.

По теореме об отрезках касательных $BM = BK, BN = BL, AK = AF, CL = CH, DF = DM, DN = DH$.

$MN = BN - BM = BL - BK = (BC - LC) - (AB - AK) = AK - LC = AF - HC = (AD - FD) - (CD - DH) = DH - FD + 2 = DN - DM + 2 = 2 - MN \implies 2MN = 2$.

Ответ: $MN = 1$.

14. *Пусть $\max\{a; b\}$ обозначает большее из чисел a и b.*
Найти наименьшее значение функции $m(x) = \max\{-x^2 + 4x - 2; \sqrt{x-2}\}$



Решение.

Построим графики $y = \sqrt{x-2}$ и $y = -x^2 + 4x - 2 = 2 - (x-2)^2$.

Функция $m(x)$ определена на множестве $[2, +\infty)$.

По графику определяем, что
при $2 \leqslant x \leqslant 3$ $\quad m(x) = 2 - (x-2)^2 \geqslant \sqrt{x-2}$,
а при $x \geqslant 3$ $\quad m(x) = \sqrt{x-2} \geqslant 2 - (x-2)^2$.

Таким образом, $m(x) \downarrow [2, 3]$ и $m(x) \uparrow [3, +\infty)$,
$\min m(x) = m(3) = \sqrt{3-2} = 2 - (3-2)^2 = 1$.

Ответ: $\min m(x) = 1$.