Вступительная работа в СПб губернаторский ФМЛ № 30, 21.08.2020, 10 класс, 2 вариант

1. *Упростите* $\left(\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+2b)\right):\dfrac{ab^{\frac{1}{2}}-ba^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}$

Решение. Преобразуем по формулам сокращённого умножения (разность кубов и разность квадратов):

$$\left(\frac{(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b)}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+2b)\right)\cdot\frac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})}=$$

$$=\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}=a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

В качестве ответа можно было указать $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$ или $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

2. *Найти сумму всех трёхзначных чисел, которые при делении на 13 дают остаток 7.*

Решение. Числа $111, 124, \ldots, 995$ образуют арифметическую прогрессию из 69 членов.
(т.к. $111=7+8\cdot 13$, а $995=7+76\cdot 13$).

Сумма первых 69 членов прогрессии равна $\dfrac{111+995}{2}\cdot 69=553\cdot 69=38\,157$.

3. *Банк в конце года начисляет 10% к сумме, находящейся на счёте в начале года.*
Каким станет вклад $70\,000$ рублей через 3 года.

Решение. (1 способ)

Через год начислят проценты $70\,000\cdot 0.1=7\,000$ рублей. Вклад станет $77\,000$ рублей.
Через два года начислят проценты $77\,000\cdot 0.1=7\,700$ рублей. Вклад станет $84\,700$ рублей.
Через три года начислят проценты $84\,700\cdot 0.1=8\,470$ рублей. Вклад станет $93\,170$ рублей.

Решение. (2 способ)

Каждый год вклад увеличивается в $1+\dfrac{10}{100}=1{,}1$ раза.

Через три года он станет $70\,000\cdot\left(\dfrac{11}{10}\right)^3=70\cdot 11^3=93\,170$ рублей.

4. *При делении двузначного числа на сумму его цифр получили частное 6 и остаток 11, при делении числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, на сумму его цифр получили частное 4 и остаток 3.*
Найдите это число.

Решение.

Обозначим цифры числа a и b. Тогда исходное число $10a+b$, сумма цифр $a+b$, перевёрнутое число $10b+a$, и

$$\begin{cases}10a+b=6\cdot(a+b)+11\\10b+a=4\cdot(a+b)+3\end{cases}\iff\begin{cases}4a-5b=11\\-a+2b=1\end{cases}\iff\begin{cases}4(2b-1)-5b=11\\a=2b-1\end{cases}\iff\begin{cases}a=9\\b=5.\end{cases}$$

Ответ: 95.

5. *Решить уравнение* $(x^2-3x-4)\sqrt{x-2}=(x+1)(x^2-6x+8)$.

Решение. Уравнение имеет смысл только при $x\geqslant 2$. Преобразуем:

$$(x+1)(x-4)\sqrt{x-2}=(x+1)(x-2)(x-4)$$
$$(x+1)(x-4)(\sqrt{x-2}-(x-2))=0.$$

Очевидно, что 4 является корнем, а число $-1<2$, поэтому не подходит. Решим уравнение $\sqrt{x-2}=x-2$.

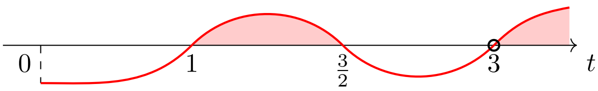
$$\sqrt{x-2}=x-2\iff\begin{cases}x-2\geqslant 0\\x-2=(x-2)^2\end{cases}\iff x=2 \text{ или } x=3.$$

Ответ: $\{2,3,4\}$.

6. *Решить неравенство* $\dfrac{x\sqrt{x}-x-5\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} \geqslant x.$

Решение. Пусть $t=\sqrt{x}$, тогда неравенство имеет вид:

$$\frac{t^3-t^2-5t+3}{t-3} \geqslant t^2 \iff \frac{t^3-t^2-5t+3-t^2(t-3)}{t-3} \geqslant 0 \iff \frac{2t^2-5t+3}{t-3} \geqslant 0 \iff \frac{(t-1)(2t-3)}{t-2} \geqslant 0$$



$$\left[\begin{aligned}&1 \leqslant t \leqslant \tfrac{3}{2}\\&3 < t\end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned}&1 \leqslant \sqrt{x} \leqslant \tfrac{3}{2}\\&3 < \sqrt{x}\end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned}&1 \leqslant x \leqslant \tfrac{9}{4}\\&9 < x\end{aligned}\right.$$

Ответ: $[1;\frac{9}{4}]\cup(9,+\infty)$.

7. *Решить уравнение* $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2x=3+\dfrac{2}{x}.$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)=3 \iff t^2-2t-3=0 \iff \left[\begin{aligned}&x+\frac{1}{x}=3\\&x+\frac{1}{x}=-1\end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned}&x^2-3x+1=0\\&x^2+x+1=0\end{aligned}\right. \iff x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: $\{\frac{3-\sqrt{5}}{2};\frac{3+\sqrt{5}}{2}\}$.

8. *Две лодки вышли одновременно из пункта A в B, первая со скоростью 12 км/ч, вторая — 9 км/ч. Спустя час вслед за ними вышел катер, который обогнал вторую лодку на 10 минут раньше, чем первую. Найдите скорость катера.*

Решение.

Пусть v — скорость катера (км/ч);
t и $t+\frac{1}{6}$ — время до встречи катера со 2 и 1 лодкой соответственно (ч);
$9t=v(t-1)$ — расстояние, пройденное 2 лодкой (и катером) до встречи;
$12(t+1/6)=v(t-1+\frac{1}{6})$ — расстояние, пройденное 1 лодкой (и катером) до встречи;
$12(t+1/6)-9t=v\cdot\frac{1}{6}$ — расстояние, пройденное катером между встречами.

$$\begin{cases}12(t+1/6)-9t=v\cdot\frac{1}{6}\\9t=v(t-1)\end{cases} \iff \begin{cases}v=6(3t+2)\\9t=6(3t+2)(t-1)\end{cases} \iff \begin{cases}v=6(3t+2)\\6t^2-5t-4=0\end{cases} \overset{t>0}{\iff} \begin{cases}v=36\\t=\frac{4}{3}\end{cases}$$

Ответ: 36 км/ч.

9. *При каком значении a произведение корней уравнения $4x^2-2x-|a^2-5|=0$ меньше, чем a?*

Решение. Корни существуют тогда и только тогда, когда $2^2+16|a^2-3|\geqslant 0$ — истинно при всех a.

По теореме Виета произведение корней равно $-\dfrac{1}{4}|a^2-5|$. Решим неравенство

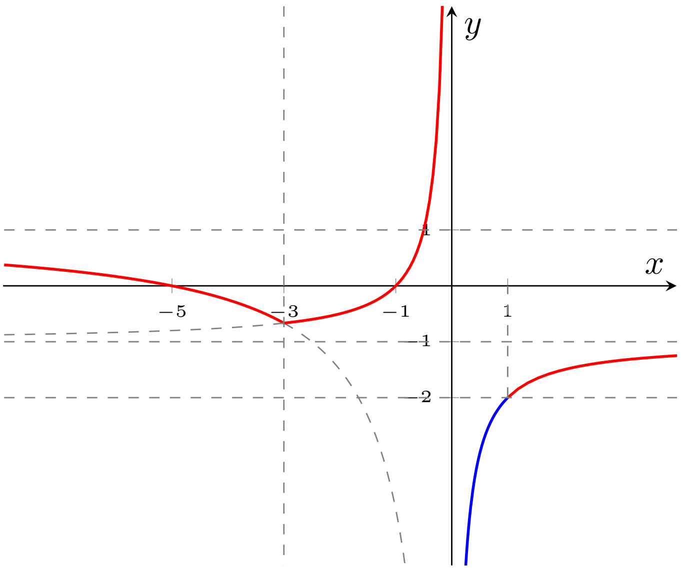
$$-\frac{1}{4}|a^2-5|<a \iff |a^2-5|>-4a \iff \left[\begin{aligned}&a^2-5>-4a\\&a^2-5<4a\end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned}&(a-1)(a+5)>0\\&(a-5)(a+1)<0\end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned}&a>1\\&a<-5\\&-1<a<5\end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned}&a>-1\\&a<-5\end{aligned}\right.$$

Ответ: при $a\in(-\infty;-5)\cup(-1;+\infty)$ произведение корней меньше, чем a.

10. *Построить график функции* $f(x) = \dfrac{2 - |x+3|}{x}$ *и решить неравенство* $f(x) \geqslant -2$.

Решение.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x-1}{x}, & x \geqslant -3 \\ \dfrac{x+5}{x}, & x < -3 \end{cases} \iff f(x) = \begin{cases} -1 - \dfrac{1}{x}, & x \geqslant -3,\ x \neq 0 \\ 1 + \dfrac{5}{x}, & x < -3. \end{cases}$$



Ординаты точек, лежащих на красной части графика, не менее -2. Абсциссы этих точек являются решениями неравенства $f(x) \geqslant -2$.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$.

11. *Построить график функции* $f(x) = |x^2 + 2x - 3|$ *и найти, при каком* k *этот график имеет три общие точки с графиком функции* $g(x) = k(x+5) + 4$.

Решение.

План построения: строим параболу $y = x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$.
Вершина параболы находится в точке $(-1, -4)$, ветви вверх, корни -3 и 1.

Затем отражаем часть в нижней полуплоскости относительно оси абсцисс.

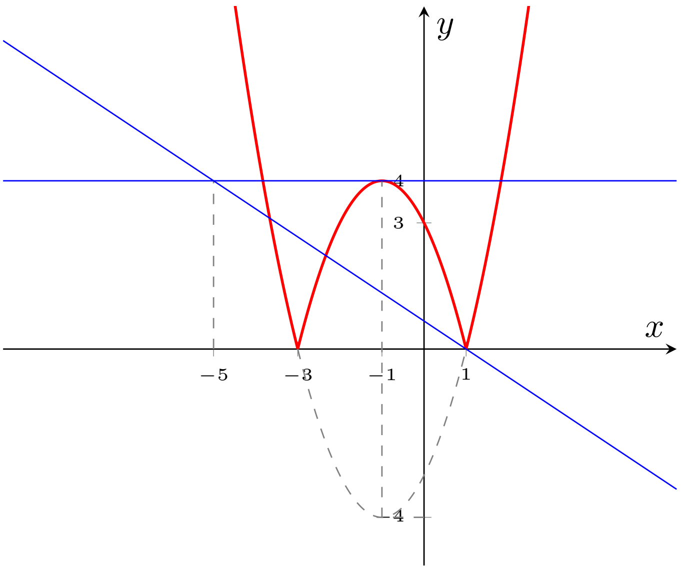


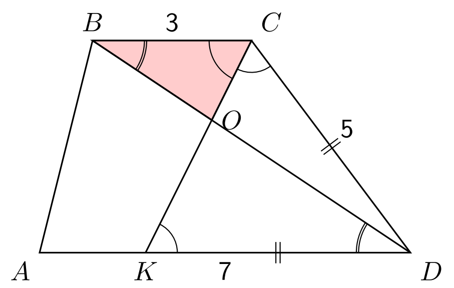
График $g(x)$ — невертикальная прямая, с угловым коэффициентом k, проходящая через $(-5, 4)$.

Из всех таких прямых подходят горизонтальная прямая при $k = 0$ и наклонная прямая, проходящая через $(1, 0)$, при $k = -\frac{2}{3}$.

Ответ: $k = 0$ или $k = -\frac{2}{3}$.

12. *$ABCD$ — трапеция с основаниями BC и AD площадью 20. CK — биссектриса угла C, точка $K \in AD$, $BC = 3, AD = 7, CD = 5, CK \cap BD = O$. Найти площадь $\triangle BOC$.*

Решение.



Решение.

CO — биссектриса $\triangle BCD \implies \dfrac{BO}{OD} = \dfrac{BC}{CD} = \dfrac{3}{5}$.

$$\frac{S_{BOC}}{S_{BCD}} = \frac{BO}{BD} = \frac{1}{1 + DO : OB} = \frac{3}{8}.$$

$$\frac{S_{BCD}}{S_{ABD}} = \frac{BC}{AD} = \frac{3}{7} \implies \frac{S_{BCD}}{S_{ABCD}} = \frac{3}{10}.$$

Т.о. $S_{BOC} = \dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{3}{10} \cdot 20 = \dfrac{9}{4}$.

Ответ: $\frac{9}{4}$.

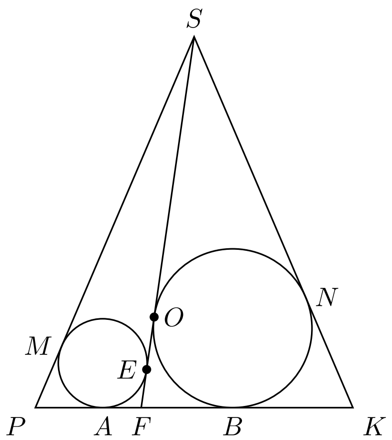
Решение. (2 способ)

$\angle DKC = \angle BCK = \angle KCD$ ($ABCD$ — трап-я, CK — бис-са) $\implies$ CDK — р/б $\implies$ $KD = CD = 5$ $\implies$ $\triangle BOC \sim \triangle KOD$ по 2-м углам с коэффициентом подобия $3 : 5$.

Значит, высота $\triangle BOC$ составляет $\dfrac{3}{3+5}$ высоты $ABCD$. Высота $ABCD$ равна $\dfrac{2S(ABCD)}{BC + AD} = \dfrac{2 \cdot 20}{3 + 7} = 4$.

$S(BOC) = \dfrac{1}{2} \cdot BC \cdot \dfrac{3}{8} \cdot 4 = \dfrac{9}{4}$.

13. *PK — основание р/б $\triangle SPK, F \in PK, PF = 1, FK = 3$. Окружности, вписанные в $\triangle PSF$ и $\triangle FSK$, касаются SF в точках E и O соответственно. Найти длину отрезка OE.*



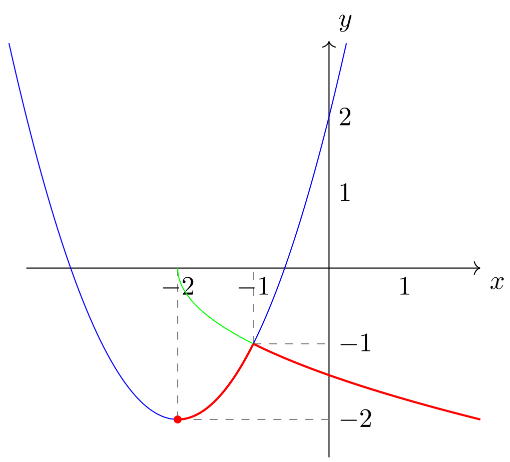
Решение. Так как $PF < FK$, то точки на отрезке SF расположены в порядке $S - O - E - F$.

По теореме об отрезках касательных $SE = SM, SO = SN, PM = PA, KB = KN, FA = FE, FO = FB$.

$OE = SE - SO = SM - SN = (SP - PM) - (SK - NK) = NK - PM = BK - AP = (FK - FB) - (FP - FA) = FA - FB + 2 = FE - FO + 2 = 2 - OE \implies 2OE = 2$.

Ответ: $OE = 1$.

14. *Пусть $\min\{a; b\}$ обозначает меньшее из чисел a и b.*
Найти наибольшее значение функции $m(x) = \min\{x^2 + 4x + 2; -\sqrt{x+2}\}$



Решение.

Построим графики $y = \sqrt{x+2}$ и $y = x^2 + 4x + 2 = (x+2)^2 - 2$.

Функция $m(x)$ определена на множестве $[-2, +\infty)$.

По графику определяем, что
при $-2 \leqslant x \leqslant -1$ $\quad m(x) = (x+2)^2 - 2 \leqslant \sqrt{x+2}$,
а при $x \geqslant -1$ $\quad m(x) = \sqrt{x+2} \leqslant (x+2)^2 - 2$.

Таким образом, $m(x) \uparrow [-2, -1]$ и $m(x) \downarrow [-1, +\infty)$,
$\max m(x) = m(-1) = \sqrt{-1+2} = (-1+2)^2 - 2 = -1$.

Ответ: $\max m(x) = 1$.