Вступительная работа для поступающих в СПб губернаторский ФМЛ № 30.

Решения задач вступительной работы для 9 класса. Вариант 1.

1. **а) Разложите на множители выражение** $\boldsymbol{x^2+2xy+y^2-z^2}$.
   б) Найдите все тройки натуральных чисел $(\boldsymbol{x;y;z})$, **для которых** $\boldsymbol{x^2+2xy+y^2-z^2=5}$.

   а) $x^2+2xy+y^2-z^2=(x+y)^2-z^2=(x+y+z)(x+y-z)$.

   б) Поскольку z натуральное число, то $x+y+z>x+y-z$ и, следовательно,

$$\begin{cases} x+y+z=5 \\ x+y-z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+y)=6 \\ 2z=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ z=2 \end{cases}.$$

   Ответ: $(\boldsymbol{1;2;2})$ **и** $(\boldsymbol{2;1;2})$.

2. **а) Решите уравнение** $\boldsymbol{x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{7})x+\sqrt{14}=0}$.
   б) Какой из корней этого уравнения ближе к числу 2?

   а) По обратной теореме Виета корнями уравнения
   $x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{7})x+\sqrt{14}=0$ являются числа $\boldsymbol{\sqrt{2}}$ **и** $\boldsymbol{\sqrt{7}}$.

   б) Заметим, что $\sqrt{2}<2$ и $\sqrt{7}>2$, а значит надо сравнить числа $2-\sqrt{2}$ и $\sqrt{7}-2$. Составим неравенство $2-\sqrt{2}>\sqrt{7}-2$ и преобразуем его.
   $2-\sqrt{2}>\sqrt{7}-2 \Leftrightarrow \sqrt{7}+\sqrt{2}<4 \Leftrightarrow 9+2\sqrt{14}<16 \Leftrightarrow 2\sqrt{14}<7 \Leftrightarrow 2\sqrt{2}<\sqrt{7}$, что неверно, поскольку 8>7. Так как тому же 8 не равно 7, то и числа наши не равны. Значит $2-\sqrt{2}<\sqrt{7}-2$ и число $\sqrt{2}$ ближе к 2, чем число $\sqrt{7}$.
   Ответ: $\boldsymbol{\sqrt{2}}$

3. **а) Напишите уравнение квадратичной функции, график которой проходит через точку** $\boldsymbol{C(1;3)}$ **и пересекает ось OX в точках с абсциссами 2 и -1.**
   б) Лежат ли точки $\boldsymbol{A(1;1)}$, $\boldsymbol{B(2;4)}$ **и** $\boldsymbol{C(3;11)}$ **на графике одной квадратичной функции?**

   а) Поскольку числа -1 и 2 являются корнями функции *f*, то $f(x)=a(x+1)(x-2)$. Значение *a* узнаем из условия $f(1)=3$:
   $f(1)=3 \Leftrightarrow a\cdot 2\cdot(-1)=3 \Leftrightarrow a=-\frac{3}{2}$.
   Ответ: $\boldsymbol{f(x)=-\frac{3}{2}(x+1)(x-2)}$.

   б) Да, лежат. Если $f(x)=ax^2+bx+c$, то $\begin{cases} f(1)=1 \\ f(2)=4 \\ f(3)=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=1 \\ 4a+2b+c=4 \\ 9a+3b+c=11 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ 3a+b=3 \\ 5a+b=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \\ c=2 \end{cases}$$

   Ответ: $\boldsymbol{f(x)=2x^2-3x+2}$.

4. Найдите площадь параллелограмма *ABCD,* в котором угол A равен 60^0, а биссектриса *AE* делит сторону *BC* на отрезки *BE*=2 и *EC*=1.

$AD||BC$ и AE – биссектриса угла A $\Rightarrow \angle BEA=\angle EAD=\angle BAE$, а значит треугольник ABE равнобедренный и $AB=BE=2$. Если BH – высота параллелограмма, то из прямоугольного треугольника ABH находим, что $BH=\sqrt{3}$. И площадь равна
$AD\cdot BH=(2+1)\sqrt{3}=3\sqrt{3}$.

Ответ: $\boldsymbol{3\sqrt{3}}$.

5. В треугольнике ABC проведена высота CD. Известно, что $CD^2 = AD \cdot DB$.

а) Докажите, что если точка D лежит на отрезке AB, то треугольник ABC прямоугольный.

б) Возможно ли такое соотношение в случае, если D не лежит на отрезке AB? Если да - приведите пример, если нет – докажите, почему.

5 a) $CD^2 = AD \cdot DB \Leftrightarrow \frac{CD}{AD} = \frac{DB}{CD}$, а поскольку еще и $\angle ADC = \angle CDB = 90^\circ$, то ΔADC подобен ΔCDB. Отсюда $\angle ACD = \angle CBD = 90^\circ - \angle BCD,$ а значит $\angle C = \angle ACD + \angle BCD = 90^\circ$.

5б) Да, возможно. Например, если взять прямоугольный треугольник CDB с катетами $CD = 2$ и $DB = 4$ и на его катете DB отметить точку A так, что AD=1, то треугольник ABC будет тупоугольным с высотой CD, и соотношение $CD^2 = AD \cdot DB$ выполняется.

6. Решите неравенства: а) $\boldsymbol{2|x-1| \geq 2-x}$; б) $\boldsymbol{\frac{2|x-1|}{2-x} \geq 1}$.

6а) При $x \geq 1$ $2|x-1| = 2x-2$ и неравенство сводится к виду $2x-2 \geq 2-x \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{3}$, что удовлетворяет условию $x \geq 1$. При $x < 1$ неравенство принимает вид $2-2x \geq 2-x \Leftrightarrow x \leq 0$, что также выполняется в рассматриваемом случае.

Ответ: $(-\infty; \mathbf{0}] \cup [\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}; +\infty)$**.**

6б) Заметим, что при $x > 2$ неравенство не имеет решений, а при $x < 2$ оно равносильно неравенству 6а), поскольку сводится к нему домножением на положительный знаменатель.

Ответ: $(-\infty; \mathbf{0}] \cup [\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}; \mathbf{2})$**.**

7. При каких значениях параметра $\boldsymbol{a}$ неравенство $\boldsymbol{2|x-1| \geq a-x}$ выполнено при всех значениях $\boldsymbol{x}$?

Решение на координатной плоскости: прямая $y = a - x$ пересекает ось OX в точке с абсциссой $x = a,$ а значит все ее точки будут находиться не выше графика функции $f(x) = 2|x-1|$ при $a \leq 1$.

Ответ: $\boldsymbol{a \leq 1}$.

8. а) Найдите наименьшее и наибольшее значение выражения $\boldsymbol{|2a-b|}$, если $\boldsymbol{-2 \leq a \leq 1}$ и $\boldsymbol{1 \leq b \leq 5}$.

б) Найдите наименьшее значение выражения $\boldsymbol{x^2+y^2}$, если $\boldsymbol{x-y=2}$.

8а. $-2 \leq a \leq 1 \Leftrightarrow -4 \leq 2a \leq 2$, $1 \leq b \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq -b \leq -1$, отсюда $-9 \leq 2a - b \leq 1,$ и окончательно получаем, что $0 \leq |2a-b| \leq 9$

Ответ: наименьшее значение 0, наибольшее 9.

8б. $x - y = 2 \Leftrightarrow y = x - 2$ и $x^2 + y^2 = x^2 + (x-2)^2 = 2x^2 - 4x + 4 = 2(x-1)^2 + 2$. Отсюда наименьшее значение равно 2 при $x = 1, y = -1$.

Ответ: 2.

9. а) Покажите, что данные числа являются квадратами натуральных чисел:

$$\boldsymbol{a = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1; \quad b = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 1; \quad c = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 + 1.}$$

б) Обобщите имеющуюся закономерность и докажите ее.

9а. $a = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1 = 121 = 11^2$; $b = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 1 = 361 = 19^2$; $c = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 + 1 = 5041 = 71^2$.

9б. Можно заметить, что во всех этих примерах произведение четырех последовательных натуральных чисел, увеличенное на единицу, является квадратом натурального числа. Докажем это.

$n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2 - 1 + 1 = \quad = (n^2 + 3n + 1)^2$.

Решения задач вступительной работы для 9 класса. Вариант 2.

1. **а) Разложите на множители выражение** $\boldsymbol{x^2+2xy+y^2-z^2}$**;**
   б) найдите все тройки натуральных чисел $\boldsymbol{(x;y;z)}$**, для которых**
   $$\boldsymbol{x^2+2xy+y^2-z^2=7}.$$
   а) $x^2+2xy+y^2-z^2=(x+y)^2-z^2=(x+y+z)(x+y-z)$;
   б) Поскольку z натуральное число, то $x+y+z>x+y-z$ и следовательно
   $$\begin{cases}x+y+z=7\\x+y-z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(x+y)=8\\2z=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=4\\z=3\end{cases}.$$
   Ответ: $\boldsymbol{(1;3;3),(2;2;3)}$ **и** $\boldsymbol{(3;1;3)}$**.**

2. **а) Решите уравнение** $\boldsymbol{x^2-(\sqrt{3}+\sqrt{5})x+\sqrt{15}=0}$**.**
   б) Какой из корней этого уравнения ближе к числу 2?

   а) По обратной теореме Виета корнями уравнения
   $x^2-(\sqrt{3}+\sqrt{5})x+\sqrt{15}=0$ являются числа $\boldsymbol{\sqrt{3}}$ **и** $\boldsymbol{\sqrt{5}}$**.**
   б) Заметим, что $\sqrt{3}<2$ и $\sqrt{5}>2$, а значит надо сравнить числа $2-\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}-2$. Составим неравенство $2-\sqrt{3}>\sqrt{5}-2$ и преобразуем его.
   $2-\sqrt{3}>\sqrt{5}-2\Leftrightarrow\sqrt{5}+\sqrt{3}<4\Leftrightarrow 8+2\sqrt{15}<16\Leftrightarrow 2\sqrt{15}<8\Leftrightarrow\sqrt{15}<4$, что верно.
   Значит $2-\sqrt{3}>\sqrt{5}-2$ и число $\sqrt{5}$ ближе к 2, чем число $\sqrt{3}$.
   Ответ: $\boldsymbol{\sqrt{5}}$

3. **а) Напишите уравнение квадратичной функции, график которой проходит через точку** $\boldsymbol{C(-1;3)}$ **и пересекает ось ОХ в точках с абсциссами 1 и -2.**
   б) Лежат ли точки $\boldsymbol{A(1;1)}$**,** $\boldsymbol{B(2;4)}$ **и** $\boldsymbol{C(3;13)}$ **на графике одной квадратичной функции?**
   а) Поскольку числа 1 и -2 являются корнями функции *f*, то $f(x)=a(x-1)(x+2)$.
   Значение a узнаем из условия $f(-1)=3$:
   $f(-1)=3\Leftrightarrow a\cdot(-2)\cdot 1=3\Leftrightarrow a=-\frac{3}{2}$.
   Ответ: $\boldsymbol{f(x)=-\frac{3}{2}(x-1)(x+2)}$**.**

   б) Да, лежат. Если $f(x)=ax^2+bx+c$, то $\begin{cases}f(1)=1\\f(2)=4\\f(3)=13\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+c=1\\4a+2b+c=4\\9a+3b+c=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+c=1\\3a+b=3\\5a+b=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=-6\\c=4\end{cases}$$
Ответ: $\boldsymbol{f(x)=3x^2-6x+4}$**.**

4. **Найдите площадь параллелограмма** ***ABCD,*** **в котором угол А равен** $\boldsymbol{60^0}$**, а биссектриса** ***AE*** **делит сторону** ***BC*** **на отрезки** ***BE*****=1 и** ***EC*****=3.**
   $AD||BC$ и $AE-$ биссектриса угла А $\Rightarrow\angle BEA=\angle EAD=\angle BAE$, а значит треугольник ABE равнобедренный и $AB=BE=1$. Если ВН – высота параллелограмма, то из прямоугольного треугольника АВН находим, что $BH=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Площадь равна
   $AD\cdot BH=(3+1)\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$.

   Ответ: $\boldsymbol{2\sqrt{3}}$**.**

5. В треугольнике ABC проведена высота CH. Известно, что $CH^2 = AH \cdot HB$.
а) Докажите, что если точка H лежит на отрезке AB, то треугольник ABC прямоугольный.
б) Возможно ли такое соотношение в случае, если H не лежит на отрезке AB? Если да - приведите пример, если нет – докажите, почему.

5 a) $CH^2 = AH \cdot HB \Leftrightarrow \frac{CH}{AH} = \frac{HB}{CH}$, а поскольку еще и $\angle AHC = \angle CHB = 90^\circ$, то ΔAHC подобен ΔCHB. Отсюда $\angle ACH = \angle CBH = 90^\circ - \angle BCH,$ а значит $\angle C = \angle ACH + \angle BCH = 90^\circ$.

5б) Да, возможно. Например, если взять прямоугольный треугольник CHB с катетами $CH = 2$ и $HB = 4$ и на его катете HB отметить точку A так, что AH=1, то треугольник ABC будет тупоугольным с высотой CH, и соотношение $CH^2 = AH \cdot HB$ выполняется.

6. Решите неравенства: а) $2|x+1| \geq x+2$; б) $\frac{2|x+1|}{x+2} \geq 1$.

6а) При $x \geq -1$ $2|x+1| = 2x+2$ и неравенство сводится к виду $2x+2 \geq 2+x \Leftrightarrow x \geq 0,$ что удовлетворяет условию $x \geq -1$. При $x < -1$ неравенство принимает вид $-2-2x \geq 2+x \Leftrightarrow$

$x \leq -\frac{4}{3}$, что также выполняется в рассматриваемом случае.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{4}{3}\right] \cup [0; +\infty)$.

6б) Заметим, что при $x < -2$ неравенство не имеет решений, а при $x > -2$ оно равносильно неравенству 6а), поскольку сводится к нему домножением на положительный знаменатель.

Ответ: $\left(-2; -\frac{4}{3}\right] \cup [0; +\infty)$.

7. При каких значениях параметра a неравенство $2|x+1| \geq x-a$ выполнено при всех значениях x?
Решение на координатной плоскости: прямая $y = x - a$ пересекает ось ОХ в точке с абсциссой $x = a,$ а значит все ее точки будут находиться не выше графика функции $f(x) = 2|x+1|$ при

$a \geq -1$.

Ответ: $a \geq -1$.

8. а) Найдите наименьшее и наибольшее значение выражения $|b-2a|$, если $-2 \leq a \leq 1$ и $1 \leq b \leq 5$.

б) Найдите наименьшее значение выражения $x^2 + y^2$, если $y - x = 2$.

8а) $-2 \leq a \leq 1 \Leftrightarrow -4 \leq 2a \leq 2$, $1 \leq b \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq -b \leq -1$, отсюда $-9 \leq 2a - b \leq 1$, и окончательно получаем, что $0 \leq |2a-b| = |b-2a| \leq 9$

Ответ: наименьшее значение 0, наибольшее 9.

8б) $y - x = 2 \Leftrightarrow y = x+2$ и $x^2 + y^2 = x^2 + (x+2)^2 = 2x^2 + 4x + 4 = 2(x+1)^2 + 2$. Отсюда наименьшее значение равно 2 при $x = -1, y = 1$.

Ответ: 2.

9. а) Покажите, что данные числа являются квадратами натуральных чисел:
$a = 1 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$; $b = 1 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$; $c = 1 + 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$.

б) Обобщите имеющуюся закономерность и докажите ее.

9а) $a = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1 = 121 = 11^2$; $b = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 1 = 361 = 19^2$; $c = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 +$
$+1 = 5041 = 71^2$.

9б) Можно заметить, что во всех этих примерах произведение четырех последовательных натуральных чисел, увеличенное на единицу, является квадратом натурального числа. Докажем это.

$n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2 - 1 + 1 ==$
$(n^2 + 3n + 1)^2$.