



## Физико-математический лицей № 30

199004, Россия, Санкт-Петербург, 7 линия ВО, д. 52, ул. Шевченко, д. 23-2

☎ (812) 323-35-55, 323-4253, 355-88-57

Предлагаем Вашему вниманию типовые задачи вступительных олимпиад в 8 класс лицея. Помимо типовых задач в текст вступительной олимпиады традиционно включаются и нестандартные задачи.

I. Разложите на множители:

- $x^3 - 8x^2 + 19x - 12$
- $-12a^2p + 15p^3 + 8a^4 - 10a^2p^2$
- $x(x + z - y) + y(y - x - z) + (x - y + z)$
- Найдите наименьшее значение выражения  
 $(2a - 1)(2a + 1) + 3b(3b - 4a)$

II. Вычислите:

- $\frac{4^4 \cdot ((3^3)^2 : 3^2)}{27^3 : 3^5}$
- $\frac{(7,26)^3 - (2,74)^3}{4,52} + 7,26 \cdot 2,74$
- $(3\frac{7}{12} + 4\frac{7}{12} : (2\frac{1}{3} - 5\frac{1}{12})) : (3,25 : 5\frac{7}{22} - 8\frac{5}{18})$
- $\frac{4a - 5b}{3a + b}$ , если известно, что  $\frac{4b + a}{5a - 7b} = 2$

III. 1. Сократите дробь:  $\frac{x^3 - x^2y}{xy - x^2 - y + x}$

2. Упростите выражение:

$$\left( \frac{1}{x+2} + \frac{5}{x^2-x-6} + \frac{2x}{x-3} \right) : \frac{2x+1}{x} - \frac{x-9}{2(x-3)}$$

3. Упростите выражение и укажите при каких  $x$  оно определено:

$$\left( \frac{x}{x^2+2x+4} + \frac{x^2+8}{x^3-8} + \frac{1}{x-2} \right) \cdot \left( \frac{x^2}{x^2-4} - \frac{2}{2-x} \right)$$

4. Найдите  $x$  из пропорции:

$$\frac{9 - 4a^2 - 4ab - b^2}{4a^2 + 2ab + 3b - 9} = \frac{3 + 2a + b}{x}$$

IV. Решите уравнение (систему):

$$1. \frac{3x-1}{7} - \frac{2x+1}{2} = \frac{x}{14} - 1$$

$$3. \frac{x^2-4x-8}{5x-x^2} = \frac{x^2-3x-7}{x(x-5)}$$

$$2. \frac{7}{x-2} = 3 + \frac{x^3+27}{(x+3)(x-2)}$$

$$4. \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{9}{y-1} = -2 \\ \frac{4}{x} - \frac{3}{y-1} = 3 \end{cases}$$

V. 1. Постройте график функции  $y = (x^2 - 4) \left( \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) - x$

2. Постройте график функции  $y = \frac{|x|}{x} \left( -\frac{1}{2}x + 2 \right)$
3. Постройте график уравнения  $\frac{(y^2 - 4)(y + 2x - 1)}{x - 1} = 0$
4. Задайте а) графически и б) аналитически функцию, которая при  $x$  таких, что  $0 < x < 1$ , принимает все значения  $y$  такие, что  $0 \leq y \leq 1$ , и не принимает других значений.
- VI. 1. В треугольнике  $ABC$   $AB = BC$ ,  $\angle C = 72^\circ$ ,  $AP$  — биссектриса,  $PK \parallel AB$ ,  $PK$  пересекает сторону  $AC$  в точке  $K$ . Найдите  $\angle KPA$ .
2. В треугольнике  $ABC$  биссектрисы  $AA_1$  и  $BB_1$  пересекаются в точке  $M$ , при этом  $\angle AMB = 120^\circ$ . Найдите  $\angle C$ .
3. В треугольнике  $ABC$   $AB = BC$ ,  $AC = 8$ , точка  $E$  лежит на стороне  $BC$ , причем  $BE = EC$ . Точка  $E$  делит периметр треугольника  $ABC$  (считая от вершины  $A$ ) на две части, из которых одна больше другой на 2. Найдите  $AB$ .
4. Как с помощью циркуля и линейки разделить угол в  $54^\circ$  на три равные части?
- VII. 1. Является ли число  $3^{45}$  точным квадратом?
2. Найдите наименьшее натуральное число, большее 2, остатки от деления которого на 3 и на 23 равны 2.
3. Сравните  $633^{372}$  и  $632^{454}$ .
4. При каких натуральных  $n$  дробь  $\frac{4n - 23}{n - 2}$  является натуральным числом?
- VIII. 1. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых график следующей функции проходит через начало координат.

$$y = \frac{5a}{a - 5} \cdot (x^2 - 1) + \frac{a^2}{a - 5}$$

2. Найдите все значения параметра  $b$ , при которых точка графика следующей функции с абсциссой  $-\frac{4}{3}$  лежит на оси абсцисс.

$$y = \frac{x - b}{3x + 1} + bx$$

3. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнения  $6x + 1 = 0$  и  $2x - a = 0$  имеют общие корни.
4. Для каждого значения параметра  $a$  решите уравнение:

$$a^2 \left( 1 - \frac{1}{x} \right) - a \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = \frac{a - 3}{x}$$

- IX. 1. Три бригады вспахали два поля общей площадью 96 га. Первое поле было вспахано за 3 дня, причем работали все вместе. Второе поле вспахали за 6 дней вторая и третья бригады. Если бы все три бригады проработали на втором поле 1 день, то оставшаяся часть второго поля первая бригада могла бы вспахать за 8 дней. Сколько гектаров в день может вспахать первая бригада?

2. Карлсон съедает банку варенья за 10 минут, Фрекен Бок — за 12 минут, а Малыш — за 15 минут. За сколько минут они съедят банку варенья втроем?
  3. Смешали 7 литров 16%-го раствора некоторого вещества с 3 литрами 6%-го раствора этого же вещества. Найдите концентрацию полученного раствора.
  4. Два поезда выехали одновременно в одном направлении из городов  $A$  и  $B$ , которые расположены на расстоянии 60 км друг от друга, и одновременно прибыли на станцию  $C$ . Если бы один из поездов увеличил скорость на 25 км/ч, а другой на 20 км/ч, то они прибыли бы в  $C$  также одновременно, но на два часа раньше. Найдите скорости поездов.
- X.
1. Разделите число 80 на две части так, чтобы одна часть составляла 60% другой части.
  2. Дан прямоугольник  $3 \times 4$  клетки. Можно ли расставить числа 3 и  $-3$  в его клетки так, чтобы все 7 сумм (по строкам и по столбцам) были различны?
  3. Укажите какое-либо целое число  $b$  такое, что число  $b^2 + 3b + 2004$  является точным квадратом.
  4. Расположите 6 точек на 4 отрезках, не лежащих на одной прямой, так, чтобы каждому отрезку принадлежало ровно 3 точки.