Физико-математический лицей № 30

Санкт-Петербург, 7-ая линия В. О., д. 52, ул. Шевченко, д. 23, к.2

☎ факс (812) 355-88-58 ☎ (812) 355-88-57

Предлагаем Вашему вниманию типовые задачи вступительных олимпиад в 9 класс лицея. Помимо типовых задач в текст вступительной олимпиады традиционно включаются и нестандартные задачи.

I. Выполните действия:

1. $\left(30\frac{1}{239}\right)^2 - 31\frac{1}{239} \cdot 29\frac{1}{239}$
2. $\left(2-\sqrt{5}\right)\sqrt{18+8\sqrt{5}}$
3. $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$
4. Сравните числа:

   а) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ и $2\sqrt{2}$

   б) $\sqrt{10}+\sqrt{13}$ и $\sqrt{12}+\sqrt{11}$

II. Упростите:

1. $\left(\dfrac{a^3-8}{a^2-4}-\dfrac{6a}{a+2}\right):\left(1-\dfrac{4}{a+2}\right)^2$
2. $\dfrac{b^2-1}{3b^2-4b+1}\cdot\dfrac{3b-1}{b}-\dfrac{1}{b}$
3. $\dfrac{\sqrt{-ab^2}-\sqrt{a^2b}}{ab}-\dfrac{1}{\sqrt{b}}$
4. $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}}$

III. Решите уравнения:

1. $x^3+x^2-4x-4=0$
2. $2x^2-3x-4=2\left(1+\sqrt{2}\right)^2-3\left(1+\sqrt{2}\right)-4$
3. $(x^2-2x)^2-2x^2+4x=3$
4. $|x-7|+|x^2-5|=x-4$

IV. Решите неравенства:

1. $-\dfrac{1}{2}x^2+2{,}5x-3\geqslant 0$
2. $\dfrac{4}{x^2-x-6}\geqslant\dfrac{1}{2+x}$
3. $\dfrac{x^2-2x-8}{x-4}\leqslant 7$
4. $|x^2-3|<|3-x|$

V. Решите системы уравнений:

1. $\begin{cases} x^2-y=\frac{3}{4} \\ y^2+x=0{,}75 \end{cases}$
2. $\begin{cases} \dfrac{6}{x+y}+\dfrac{5}{x-y}=7 \\ \dfrac{3}{x+y}-\dfrac{2}{x-y}=-1 \end{cases}$
3. Найдите все значения параметра k, при которых следующая система имеет бесконечно много решений.

$$\begin{cases} (k+2)x+3y=9+kx \\ x+(k+4)y=2 \end{cases}$$

VI. 1. Найдите все значения параметра a, при которых следующее уравнение имеет ровно одно решение.

$$(ax^2+3x+1)(x-3)=(x-3)$$

2. Найдите все значения параметра a, при которых сумма корней следующего уравнения отрицательна.

$$x^2-(a^2-5a)x+4=0$$

3. Пусть x_1, x_2 — корни уравнения $2x^2-7x+4=0$. Не решая это уравнение, найдите:

$$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_1}$$

4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$7x^2-2x+4a=0$$

а) имеет корень, равный 3.

б) имеет два различных вещественных корня.

в) имеет только положительные корни.

г) не имеет отрицательных корней.

VII. 1. Найдите значения параметров a, b, c такие, что точка $A(0;4)$ лежит на параболе $y=ax^2+bx+c$, а точка $N(-1;6)$ — вершина этой параболы.

2. Постройте график функции $y=\sqrt{(1-2x)^2}-3$ и найдите радиус окружности, описанной около треугольника, отсекаемого осью Ox от этого графика.

3. Найдите уравнения всех прямых, которые проходят через начало координат и имеют единственную общую точку с графиком функции $y=(x-1)^2$.

4. Найдите все значения b такие, что функция $y=bx^2-6x+3$ имеет наименьшее значение, и это значение меньше, чем 2,5.

VIII. 1. $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, O — точка пересечения его диагоналей, $OB=OD$, $AO<OC$. Докажите, что $\angle BAD>\angle BCD$.

2. В равнобедренном треугольнике длина основания равна 4, а длина медианы, проведенной к боковой стороне равна 5. Найдите площадь треугольника.

3. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны, длины диагоналей этого четырехугольника равны 6 и 8. Найдите площадь четырехугольника.

4. В трапеции $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ $\angle A=60^\circ$, $\angle D=30^\circ$, $AD=a$, $BC=b$. Найдите:

а) площадь трапеции $ABCD$,

б) длину отрезка, соединяющего середины BC и AD.

IX. 1. Натуральные числа a и b таковы, что $19a=97b$. Докажите, что их сумма $(a+b)$ делится на 116.

2. Найдите $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b}$, если $a+b+c=7$ и $\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{a+b}=\dfrac{7}{10}$

3. Найдите все целые значения n такие, что $\sqrt{n^2-17}$ — целое число.

4. Найдите количество различных делителей числа $6^{15}\cdot 21^7$