Физико-математический лицей № 30

199004, Россия, Санкт-Петербург, 7 линия ВО, д. 52, ул. Шевченко, д. 23-2

☎ (812) 323-35-55, 323-4253, 355-88-57

Предлагаем Вашему вниманию типовые задачи вступительных олимпиад в 10 класс лицея. Помимо типовых задач в текст вступительной олимпиады традиционно включаются и нестандартные задачи.

I. Упростите:

1. $\left(\dfrac{d^3-8}{d^2-4}-\dfrac{6d}{d+2}\right):\left(1-\dfrac{4}{d+2}\right)^2$
2. $\dfrac{x+40}{x^3-16x}:\left(\dfrac{x-4}{3x^2+11x-4}-\dfrac{16}{16-x^2}\right)$
3. $\left(\left(x^{\frac{5}{6}}-\sqrt[3]{x}\right):\left(\left(\dfrac{x^{\frac{3}{4}}-1}{x^{\frac{1}{4}}-1}-x^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(\dfrac{x^{\frac{3}{4}}+1}{x^{\frac{1}{4}}+1}-x^{\frac{1}{2}}\right)\right)\right)^{-3}$
4. $\dfrac{(x^2-y^2)\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)}{\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{x^2y^3}-\sqrt[3]{x^3y^2}-\sqrt[3]{y^5}}-\dfrac{x\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^4}}{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)^2+\sqrt[3]{xy}}$

II.
1. Выполните действия: $\sqrt{175}-3\sqrt{3\frac{1}{9}}-6\sqrt{1{,}75}$
2. Вычислите $a^3+\dfrac{1}{a^3}$, если $a+\dfrac{1}{a}=-4$.
3. Выясните, является ли рациональным число:
   $\left(\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{6}}\cdot\sqrt[6]{9-6\sqrt{2}}-\sqrt[6]{18}}{\sqrt[6]{2}-1}\right)^3$
4. Сравните числа:
   а) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ и $2\sqrt{2}$
   б) $\sqrt{10}-\sqrt{11}$ и $\sqrt{12}-\sqrt{13}$

III. Решите уравнения:

1. $x^2+2x+2\,|x+1|=7$
2. $\left(345x^2+137x-208\right)\sqrt{3x-2}=0$
3. $\dfrac{8x-4x^2}{1-x^2}=\dfrac{x^3-4x}{x+1}$
4. $(x+1)\left(x^2+5x+6\right)=x+2$

IV. Решите неравенства:

1. $-\dfrac{1}{2}x^2+2{,}5x-3\geqslant 0$
2. $\dfrac{4}{x^2-x-6}\geqslant(2+x)^{-1}$
3. $\left(\sqrt{5}-3\right)\left(x^{0{,}5}-2x^{0{,}25}+1\right)>14-6\sqrt{5}$
4. $\dfrac{x^2-2x-8}{|x-4|}\leqslant 7$

V. Решите системы уравнений:

1. $\begin{cases} x^2 - y = \dfrac{3}{4} \\ y^2 + x = 0{,}75 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{6}{x+y} + \dfrac{5}{x-y} = 7 \\ \dfrac{3}{x+y} - \dfrac{2}{x-y} = -1 \end{cases}$

3. Найдите все значения параметра k, при которых следующая система имеет бесконечно много решений.

$$\begin{cases} (k+2)x + 3y = 9 + kx \\ x + (k+4)y = 2 \end{cases}$$

VI. Дано уравнение $(a-1)x^2 + 4(a+1)x + a - 4 = 0$.

а) При каких значениях a уравнение имеет единственное решение?

б) При $a = 2$ найдите $x_1^3 + x_2^3$, где x_1, x_2 — корни данного уравнения.

в) При $a = -2$ найдите все значения параметра b, для которых решение неравенства $(a-1)x^2 + 4(a+1)x + a - 4 \geqslant b$ — отрезок.

VII. 1. Какие значения принимает выражение $a^2 - 6a + 1$ при a, принадлежащих отрезку $[1; 10]$

2. Найдите все значения параметра k, при которых гипербола $y = \dfrac{k}{x-2}$ пересекает прямую, задаваемую уравнением $y = x + 1$, в точке, лежащей на оси ординат.

3. Постройте график функции $y = \dfrac{x^3 - x}{|x|}$

4. Найдите все значения параметра a, при которых прямая $y = a$ пересекает график функции $y = \left|x^2 - 4x\right|$ в двух точках.

VIII. 1. Второй член арифметической прогрессии составляет 88% от первого. Найдите сколько процентов первый член составляет от пятого.

2. Сумма первых трех членов убывающей геометрической прогрессии равна 21, а сумма их квадратов — 189. Найдите первый член и знаменатель данной прогрессии.

3. Могут ли длины сторон прямоугольного треугольника образовывать геометрическую прогрессию?

4. Найдите сумму всех трехзначных чисел, не делящихся на 11.

IX. 1. В равнобедренную трапецию можно вписать окружность. Найдите площадь этой трапеции, если ее основания равны 1 и 25.

2. По стене крепости, имеющей форму равностороннего треугольника со стороной 400 м, ходят часовые, которые вооружены луками с дальностью стрельбы 100 м. Какова площадь “простреливаемой” территории

   а) снаружи крепости,

   б) внутри крепости?

3. $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, O — точка пересечения его диагоналей, $OB = OD$, $AO < OC$. Докажите, что $\angle BAO > \angle BCD$.

4. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) $\angle A = 60^\circ$, $\angle D = 30^\circ$, $AD = a$, $BC = b$. Найдите:
   а) площадь трапеции $ABCD$,
   б) длину отрезка, соединяющего середины BC и AD.

X.

1. Выясните, является ли простым число $2^{10} + 5^{12}$.
2. Найдите наибольшее значение выражения $-x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 2x + 3$.
3. Пятнадцать различных натуральных чисел дают в сумме 121. Найдите эти числа.
4. Операция $*$ каждым двум числам x, y ставит в соответствие число, обозначаемое $x * y$. При этом для всех чисел x, y, z выполняется:
   а) $x * x = 0$
   б) $(x + y) * z = x + (y * z)$

   Найдите $6 * 14$.