Санкт-Петербургский губернаторский физико-математический лицей №30

Вступительная работа в 8 класс. I тур, 19.08.2020

Решения: **<u>I вариант</u>**

1. Запишите выражение $27^6 \cdot 169^9 : (5^9)^2$ в виде куба степени с натуральным показателем.

Решение. $27^6 \cdot 169^9 : (5^9)^2 = 3^{3\cdot 6} \cdot 13^{2\cdot 9} : 5^{2\cdot 9} = \left(\frac{3\cdot 13}{5}\right)^{6\cdot 3} = \left(\left(\frac{39}{5}\right)^6\right)^3$

2. Определите, может ли

а) число, составленное из одних восьмёрок, делиться на число, составленное из одних троек?

б) А наоборот? Ответы не забудьте обосновать.

Решение.

а) Да, например, $888 \vdots 3$, так как сумма цифр числа 888 равна $8 \cdot 3$ и делится на 3.

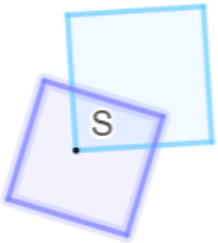
б) Нет, так как число, составленное из одних троек – нечётное, а число, составленное из одних восьмёрок чётное.

3. Квадраты со сторонами 12 и 15 пересекаются. При удалении из квадратов их общей части получаются две области. Вычислите разность их площадей.

Решение. Пусть S – площадь общей части.

Тогда разность площадей оставшихся частей равна $(15^2 - S) - (12^2 - S) = 15^2 - 12^2 = 3 \cdot 27 = 81$.

Ответ: 81.



4. Игорь и Паша могут покрасить забор за 4 часа, Паша и Володя могут покрасить этот же забор за 12 часов, а Володя и Игорь – за 9 часов. За какое время мальчики покрасят забор, работая втроём?

Решение. Из условия Игорь и Паша за час могут покрасить $\frac{1}{4}$ забора; Паша и Володя - $\frac{1}{12}$, а Володя и Игорь - $\frac{1}{9}$ часть забора.

Обозначая производительности Игоря, Паши и Володи через *I*, *p*, *v* заборов в час

соответственно, получим $\begin{cases} i + p = \frac{1}{4} \\ p + v = \frac{1}{12} \\ i + v = \frac{1}{9} \end{cases}$.

I способ. Сложив эти равенства, получим $2(i + p + v) = \frac{9+3+4}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$.

Откуда $i + p + v = \frac{2}{9}$, а значит мальчики покрасят забор за $\frac{1}{i+p+v} = \frac{9}{2} = 4{,}5$ ч.

Но заметим, что тогда Игорь и Паша красят забор быстрее, чем все трое делают это вместе. Противоречие показывает, что такое невозможно!

II способ. Решая систему, получим, что $i = \frac{5}{36}$, $p = \frac{1}{9}$, $v = -\frac{1}{36}$. Отрицательное значение производительности показывает, что такое невозможно.

Или с комментарием, что Володя мешал, приводим ответ:)

5. В равнобедренном треугольнике один из углов в два раза меньше другого. Найдите величину наименьшего угла этого треугольника.

Решение. 1 случай: углы α, α и 2α. То есть $4\alpha = 180°$.Таким образом, $\alpha = 45°$.

2 случай: углы α, 2α и 2α. То есть $5\alpha = 180°$. Таким образом, $\alpha = 36°$.

Ответ: $45°$ или $36°$.

6. Решите уравнение: а) $(x+1)\cdot(x-5) = (x+1)\cdot(3-x)$

Решение. $(x+1)\cdot(x-5) = (x+1)\cdot(3-x)$, то есть $\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ 2x=8 \end{array}\right.$

Ответ: -1; 4

б) $\left(\frac{6x-1}{x^2+6x}+\frac{6x+1}{x^2-6x}\right):\frac{x^2+1}{x^2-36}-\frac{12}{x-1}=\frac{12}{x-x^2}$

Решение.

б) $\left(\dfrac{6x-1}{x^2+6x}+\dfrac{6x+1}{x^2-6x}\right):\dfrac{x^2+1}{x^2-36}-\dfrac{12}{x-1}=\dfrac{12}{x-x^2}.$

$$\left(\frac{6x-1}{(x+6)x}+\frac{6x+1}{(x-6)x}\right):\frac{x^2+1}{x^2-36}=\frac{12}{x-1}+\frac{12}{x(1-x)}$$

$$\left(\frac{(6x-1)(x-6)}{(x+6)x(x-6)}+\frac{(6x+1)(x+6)}{(x-6)x(x+6)}\right)\cdot\frac{(x-6)(x+6)}{x^2+1}=\frac{12x}{x(x-1)}-\frac{12}{x(x-1)}$$

$$\frac{(6x-1)(x-6)+(6x+1)(x+6)}{(x^2+1)x}=\frac{12x-12}{x(x-1)}$$

$$\frac{6x^2-36x-x+6+6x^2+36x+x+6}{(x^2+1)x}=\frac{12}{x}$$

$$\frac{12(x^2+1)}{(x^2+1)x}=\frac{12}{x}$$

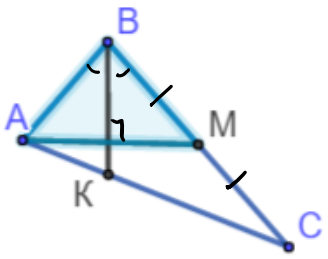
$$\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$$

О.Д.З.: $x\neq 0, x\neq \pm 6,\ x\neq 1$

Ответ: $(-\infty;-6)\cup(-6;0)\cup(0;1)\cup(1;6)\cup(6;+\infty)$

7. Медиана *AM* треугольника *ABC* перпендикулярна его биссектрисе *BK*. Найдите *AB*, если *BC=12*.

Решение. По признаку треугольник *ABM* равнобедренный (биссектриса к стороне *AM* является высотой), *AB=BM=12:2=6*.



8. Дана функция $y = \frac{x^2-2x}{2-x} + 4$.

а) Постройте график функции

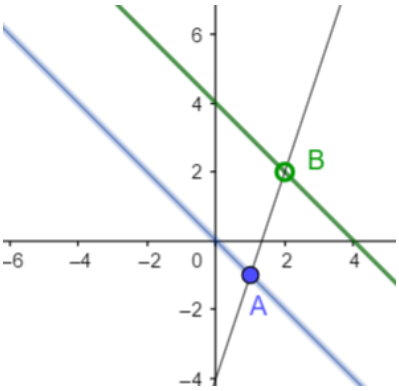
б) Какие значения принимает эта функция при положительных *x*?

в) Напишите уравнение прямой, проходящей через точку *(1; -1)* и не имеющей общих точек с графиком данной функции.

Решение.

а) $y = \frac{x^2-2x}{2-x} + 4 = \frac{x\cdot(x-2)}{-(x-2)} + 4 = 4 - x, x \neq 2.$

$y = 4 - x$ – линейная функция, графиком которой является прямая с выколотой точкой $B(2; 2)$



б) Из графика $y < 2$ и $2 < y < 4$.

в) Таких прямых через данную точку $A\ (1;\ -1)$ проходит две:

1. Одна прямая (на рис. – синего цвета) параллельна прямой $y = 4 - x$, а значит имеет вид $y = -x + b$, причём по условию $y(1) = -1$.

То есть $-1 + b = -1$, что означает, что $b = 0$ и искомая прямая имеет вид $y = -x$.

2. Вторая проходит через данную точку *(1; -1)* и выколотую из графика пункта а) точку $(2; 2)$

Пусть эта прямая имеет вид $y = kx + b$.

Решив систему $\begin{cases} 1 \cdot k + b = -1 \\ 2 \cdot k + b = 2 \end{cases}$, получим, что $k = 3; b = -4$.

Ответ: $y = -x$ или $y = 3x - 4$.

9. Про числа x, y и z известно, что выполнены три условия: $\frac{x}{y^2+1} = z$, $\frac{y}{z^2+1} = x$ и $\frac{z}{x^2+1} = y$. Найдите эти числа.

Решение. 1. Тройка чисел $(0; 0; 0)$ обращает все три условия в верные равенства, то есть одно решение найдено.

Причём заметим, что если одно из чисел x, y или z равно нулю, то тут же следом и второе, а за ним и третье обращается в ноль, что даёт нам уже найденное решение $(0; 0; 0)$.

2. Рассмотрим оставшиеся случаи, когда ни одно из чисел x, y, z не рано нулю.

По условию $\frac{x}{y^2+1} = z$, $\frac{y}{z^2+1} = x$, $\frac{z}{x^2+1} = y$. Перемножив эти три числа (равенства), получим следствие $\frac{x}{y^2+1} \cdot \frac{y}{z^2+1} \cdot \frac{z}{x^2+1} = z \cdot x \cdot y$.

Сократим обе части на произведение неравных нулю чисел x, y, z и получим следующее равенство $\frac{1}{y^2+1} \cdot \frac{1}{z^2+1} \cdot \frac{1}{x^2+1} = 1$, то есть $(x^2 + 1) \cdot (y^2 + 1) \cdot (z^2 + 1) = 1$, что невозможно, так как в левой части стоит произведение положительных чисел, больших 1, значит левая часть больше 1, а не равна 1.

Ответ: $x = y = z = 0$.